МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ
ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Вища математика: Елементи лінійної алгебри: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальностей 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 144 «Теплоенергетика» /КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова, Н. Л. Денисенко. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,326 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 44 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 3 від 22.03.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ
ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Єрьоміна Тетяна Олександрівна*, канд. фіз-мат. наук, ст. викл.
Поварова Олена Андріївна, канд. фіз-мат. наук, доц.
Денисенко Наталя Леонідівна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.*, д-р фіз-мат. наук, проф.

Рецензент *Симчук Я. В.*, канд. фіз.-тех. наук, доц., КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Тематика методичних вказівок охоплює розділ дисципліни «Вища математика», в якому вивчаються визначники, матриці, системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянуто основні поняття, властивості та дії над матрицями і визначниками, детально розглянуто три методи розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь: Крамера, Гаусса і матричний метод та спосіб дослідження систем на сумісність. Дана робота містить всі основні задачі з теми «Елементи лінійної алгебри», що супроводжуються теоретичні відомостями та списком завдань для типового розрахунку. Усі наведені твердження та формули пояснюються на конкретних прикладах і застосовуються до розв’язання задач.

§1. Визначники. Означення та їх властивості.

1. ***Матрицею*** *називається прямокутна таблиця чисел* $a_{ij} \in R$, $i = 1,...,m$ $(i = \overline{1,m})$, $j = \overline{1,n}$, *що містить* m *рядків однакової довжини та* n *стовпців однакової довжини і записується у вигляді:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Скорочено матриці записують $A = \left(a_{ij}\right), i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}$, *числа* a_{ij} *називаються* ***елементами*** *матриці, причому індекс* i *– вказує номер рядка, індекс* $j -$ *номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.*

Позначають матриці великими латинськими літерами $A, B, C, D, \dots$.

2. *Добуток* $m \times n$ *числа* m *рядків на число* n *стовпців називають* ***розміром*** *матриці і записують* $A_{m \times n}$.

Якщо $m = n$, *то матриця називається* ***квадратною****. Квадратну матрицю розміру* $n \times n$ *називають* ***матрицею n-го порядку****.*

Квадратна матриця має головну та побічну діагоналі.

3. *Елементи* $a_{11}, \ a_{22}, \dots, \ a_{nn}$, *що знаходяться на діагоналі, яка йде з лівого верхнього кута в правий нижній кут, утворюють* ***головну діагональ*** *квадратної матриці; а з лівого нижнього – у правий верхній кут –* ***побічну діагональ****: елементи* $a_{n1}, \ a_{(n-1)2}, \dots, \ a_{1n}$.

Для квадратних матриць існує поняття визначника матриці (детермінанта).

Якщо $n = 2$, *то* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

якщо $n = 3$, *то* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

4. Визначником 2-го порядку, *що відповідає матриці А другого порядку, називається число, яке обчислюється за правилом:*

$$\Delta = \Delta(A) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Тобто число, яке дорівнює різниці добутків елементів, що розташовані на головній та побічній діагоналях.

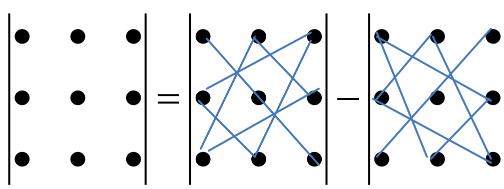
5. Визначником 3-го порядку, *що відповідає матриці А 3-го порядку, називається число, яке обчислюється за правилом (метод Саррюса)*:

$$\Delta = \Delta(A) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\ .$$

Наведемо ще два правила обчислення визначників 3-го порядку:

- ***правило трикутників***:



- ***правило діагоналей***:

а) дописати знизу два перших рядки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

б) дописати справа два перших стовпці

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. =$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

6. *Мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* n*-го порядку, називається визначник* $(n-1)$*-го порядку, який утворюється з даного визначника при викреслені* i *-го рядка та* j *-го стовпця, на перетині яких розташований даний елемент* a_{ij} .

7. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} *елемента* a_{ij} *називається його мінор, взятий зі знаком* $(-1)^{i+j}$ *, тобто* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Розглянемо визначник 3-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і запишемо алгебраїчні доповнення до елементів першого рядка:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

***8. Визначником (детермінантом) n-го порядку** називається число, що дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка визначника на їх алгебраїчні доповнення.*

$$\Delta = \Delta(A) = det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n} \overset{або}{=}$$

$$\overset{або}{=} a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + \dots + a_{2n}A_{2n}$$

і т.д.

Наведемо ряд прикладів.

№1. Обчислимо визначник другого порядку.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 14 - 4 = 10.$$

№2. Обчислимо визначник другого порядку.

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{12} \end{vmatrix} = \cos^2\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}.$$

№3. Обчислити визначник третього порядку.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot3 + 4\cdot2\cdot2 + 1\cdot4\cdot5 - (5\cdot1\cdot2 + 4\cdot1\cdot3 + 4\cdot2\cdot2) =$$

$$= 6 + 16 + 20 - 10 - 12 - 16 = 4.$$

№4. Обчислимо визначник третього порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot 3 - (3\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 3) =$$

$$= 4 + 2 - 9 - (6 - 4 + 3) = -8$$

№5. Розв'яжемо рівняння, обчисливши визначник другого порядку.

$\begin{vmatrix} x & x-2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$, обчисливши визначник, отримаємо рівняння:

$x(x-2) - (-5)(x-2) = 0$,

$(x-2)(x+5) = 0$.

Отже, розв'язки рівняння: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{array}\right.$

№6. Розв'яжемо нерівність, обчисливши визначник другого порядку.

$$\begin{vmatrix} |x-1| & 1 \\ 2 & \dfrac{1}{|x+2|} \end{vmatrix} < 0.$$

Аналогічно до прикладу 5, обчислимо визначник та розв'яжемо отриману нерівність:

$\dfrac{|x-1|}{|x+2|} - 2 < 0$,

$\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| - 2 < 0$.

I . $\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty) \\ \dfrac{x-1}{x+2} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty) \\ \dfrac{x-1-2(x+2)}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty) \\ \dfrac{-x-5}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup [1; +\infty) \\ \dfrac{x+5}{x+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-2) \cup [1;+\infty) \\ x \in (-\infty;-5) \cup (-2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;-5) \cup [1;+\infty).$$

$$\text{II.} \begin{cases} x \in (-2;1] \\ -\dfrac{x-1}{x+2} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;1] \\ \dfrac{x-1}{x+2} + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;1] \\ \dfrac{x-1+2x+4}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;1] \\ \dfrac{3x+3}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;1] \\ \dfrac{x+1}{x+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;1].$$

Об’єднаємо I і II випадки: $\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty;-5) \cup [1;+\infty) \\ x \in (-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty;-5) \cup (-1;+\infty).$

Властивості визначників

1. ***Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями, таке перетворення називається* транспонуванням *визначника.***
2. *При перестановці місцями двох будь-яких рядків, визначник змінює знак на протилежний.*

   Тобто, для визначника 2-го порядку виконується рівність:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. *Якщо визначник має два однакових рядки, то він дорівнює нулю.*

   Наприклад, визначник 3-го порядку, у якого перший та другий рядки однакові, рівний нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Спільний множник, що міститься в усіх елементах будь якого рядка, можна винести за знак визначника.*

   Властивість 4 на прикладі визначника 2-го порядку, має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad k = const\,.$$

5. *Якщо будь-який з рядків визначника складається лише з нулів, то визначник дорівнює нулю. Наприклад,*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. *Якщо елементи будь-яких двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю. Наприклад,*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7. *Якщо всі елементи деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких елементи вказаного рядка складаються з перших доданків, а у другого – з других, решта елементів однакові.*

Тобто, якщо у визначнику 2-го порядку, наприклад, елементи другого рядка є сумою двох доданків, то виконується рівність:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

8. *Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те саме число.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}.$$

9. ***Теорема Лапласа (про розклад визначника за елементами рядка).*** *Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23},$$

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \, .$$

10. Теорема 2 (про анулювання визначника). *Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.*

Розглянувши визначник 3-го порядку, використовуючи властивість 10, отримаємо рівності:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0,$$

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0,$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

Наведемо ряд прикладів.

№1. Обчислимо визначник, користуючись його властивостями. Спочатку зведемо його до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -2a^2$$

№2. Обчислимо визначник, використовуючи його властивості 4 та 7:

$$\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & 1 \\ ac & a^2+c^2 & 1 \\ ad & a^2+d^2 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} b & a^2+b^2 & 1 \\ c & a^2+c^2 & 1 \\ d & a^2+d^2 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} b & a^2+b^2 & 1 \\ b-c & b^2-c^2 & 0 \\ b-d & b^2-d^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a(b-c)(b-d)\cdot\begin{vmatrix} b & a^2+b^2 & 1 \\ 1 & b+c & 0 \\ 1 & b+d & 0 \end{vmatrix} = a(b-c)(b-d)\cdot\begin{vmatrix} b & a^2+b^2 & 1 \\ 1 & b+c & 0 \\ 0 & c-d & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a(b-c)(b-d)\cdot\begin{vmatrix} a^2+b^2 & b & 1 \\ b+c & 1 & 0 \\ c-d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a(b-c)(b-d)(c-d).$$

№3. Обчислимо визначник, використовуючи його властивості 7 та 8:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \sin^2\beta+\cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \sin^2\gamma+\cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & 1 \\ \sin^2\beta & 1 & 1 \\ \sin^2\gamma & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

№4. Обчислимо визначник 4-го порядку, розклавши його за елементами третього рядка, використовуючи властивість 9:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+c\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + d\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot(1+1+1) - b\cdot(1+1-1) +$$

$$+c\cdot(1+1) - d\cdot(-1+1-1) = 3a - b + 2c + d.$$

З прикладу 4 видно, що обчислення визначника n-го порядку досить громіздкий процес: так для обчислення визначника 4-го порядку потрібно було обчислити 4 визначники 3-го порядку; для обчислення визначника 5-го порядку потрібно обчислити 5 визначників 4-го порядку, або 20 визначників 3-го *порядку, що не є раціональним. Тому розкладати визначник за елементами якогось рядка чи стовпця, без попередніх перетворень не зручно. Отже, визначник спочатку зводять до трикутного вигляду, користуючись його властивостями, а тоді обчислюють.*

№5. Обчислимо визначник 4-го порядку, звівши його до трикутного вигляду, користуючись його властивостями:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot 2 = 24.$$

№6. Обчислимо визначник 5-го порядку, привівши до трикутного вигляду, користуючись його властивостями:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(1-0) = 1.$$

§2. Матриці. Означення та їх властивості.

1. *Матриця, яка містить один рядок називається* ***матриця-рядок (вектор-рядок)***:

$$A_{1\times n}=(a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \dots\ a_{1n}).$$

2. *Матриця, яка містить один стовпчик називається* ***матриця-стовпчик (вектор-стовпчик)***:

$$B_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \dots\\ b_{m1}\end{pmatrix}.$$

3. *Матриця розміру* 1×1, *яка містить одне число, ототожнюється з цим числом. Наприклад,* $A_{1\times 1}=(5)=5$.

4. *Дві матриці* $A_{m\times n}=(a_{ij})$, $B_{m\times n}=(b_{ij})$ *називаються* ***рівними***, *якщо їх розміри рівні і відповідні елементи рівні*: $a_{ij}=b_{ij}$.

5. ***Нульовою*** *називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю і позначається*:

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

6. *Квадратна матриця називається* ***діагональною матрицею***, *якщо всі її елементи, крім тих, що розташовані на головній діагоналі дорівнюють нулю*:

$$D_{n\times n}=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}\end{pmatrix}.$$

7. *Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається* ***одиничною матрицею*** *і позначається E.*

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

8. *Квадратна матриця називається* ***трикутною матрицею****, якщо всі елементи, що розташовані нижче (вище) головної діагоналі дорівнюють нулю.*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

9. Сумою двох матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *і* $B_{m\times n}=(b_{ij})$ *називається матриця* $C_{m\times n}=(c_{ij})=A_{m\times n}+B_{m\times n}$, *кожен елемент якої* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

10. Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на число*** α *називається матриця* $B_{m\times n}=(b_{ij})=\alpha\cdot A_{m\times n}$, *кожен елемент якої* $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$ *дорівнює добутку відповідних елементів матриці* $A_{m\times n}$ *на число* α.

11. Віднімання матриць. *Різницю матриць* $A-B$ *можна визначити як* $A-B=A+(-1)B$.

12. *Операції додавання матриць і множення матриці на число називають* ***лінійними операціями*** *над матрицями і мають наступні властивості.*

13. Множення матриць. *Операція множення двох матриць вводиться тільки для випадку, коли число стовпців першої матриці рівне числу рядків другої матриці. Такі матриці називаються* ***узгодженими****.*

14. Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на матрицю*** $B_{n\times k}=(b_{ij})$ *називається матриця* $C_{m\times k}=(c_{ij})=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}$, *елементи* c_{ij} *якої дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці* A *на відповідні елементи* j *-го стовпця матриці* B: $c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}\cdot b_{rj}$, *де* $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$. *Це правило називається правилом множенням рядка на стовпець.*

Увага! *Операція множення двох матриць вводиться лише для узгоджених матриць.*

15. Матриця A називається узгодженою з матрицею B*, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.*

16. *Якщо* $AB = BA$*, то матриці A і B називаються* **комутативними.**

Операція множення матриць, у загальному випадку, не підлягає комутативній властивості: $AB \neq BA$.

17. *Під поняттям піднесення матриці до n-го степені розуміють добуток матриці самої на себе n разів.*

Операція піднесення матриці до степені має місце лише для квадратних матриць.

18. Транспонуванням матриці *називається заміна рядків на стовпці зі збереженням порядку їх слідування.*

Властивості операцій суми матриць та добутку матриці на число

1) $A + B = B + A$ *– комутативність відносно додавання матриць;*

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ *– асоціативність відносно додавання матриць;*

3) $A + O = A$ *– роль нульової матриці;*

4) $A - A = O$ *– роль протилежної матриці;*

5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$ *– асоціативність відносно множення чисел;*

6) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ *– дистрибутивність числового множника відносно суми матриць;*

7) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ *– дистрибутивність матричного множника відносно суми чисел, де* $A,\ B, C, O -$ *матриці,* $\alpha, \beta -$ *числа.*

Властивості операцій добутку матриць

(за умови, що вказані операції мають зміст):

1) $\left(AB\right)C = A(BC)$ *– асоціативність множення матриць;*

2) $A\left(B+C\right) = AB + AC$ *– дистрибутивна властивість першого множника;*

3) $\left(A+B\right)C = AC + BC$ *– дистрибутивна властивість другого множника;*

4) $(\alpha A)B = \alpha\left(AB\right) = A(\alpha B)$ *– асоціативність множення матриць щодо множення їх на число;*

5) $A\cdot O = O\cdot A = O$ *– роль (властивість) нульової матриці O;*

6) $A\cdot E = E\cdot A = A$ *– роль (властивість) одиничної матриці E;*

<u>Зауваження.</u> *У властивостях 5)-6) матриці A, E, O однакового порядку, а матриця* A *– квадратна матриця;*

7) $\det\left(AB\right) = \det A\cdot\det B$*, якщо* A *і* B *– квадратні матриці однакового порядку.*

<u>*Властивості операції транспонування матриць*</u>

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$, 3) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$,

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, 4) $(A^T)^T = A$.

Наведемо ряд прикладів.

№1. Знайдемо матрицю $A = 2B - C^T$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A = 2\cdot B - C^T = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 & 4-0 & 6-(-2) \\ 8-(-1) & 10-2 & 12-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 9 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

№2. Знайдемо добуток матриць.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 5\cdot(-3) & 3\cdot 1 + 5\cdot 2 \\ 6\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) & 6\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$$

№3. Знайдемо добуток матриць.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 7\cdot 4 \\ -4\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця

<u>Означення 1</u>. Квадратна матриця A^{-1} порядку n називається ***оберненою*** *до матриці A, якщо виконується рівність: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.*

І обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

<u>Означення 2</u>. Квадратна матриця A називається:

- ***виродженою,*** *якщо* $\det A = 0$;
- ***невиродженою,*** *якщо* $\det A \neq 0$.

Теорема 1. <u>(Необхідна і достатня умова існування оберненої матриці)</u>. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

Теорема 2. <u>(Єдиність оберненої матриці)</u>. Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

<u>Властивості оберненої матриці</u>

1) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

3) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Наведемо ряд прикладів.

№ 1. Знайдемо обернену матрицю до заданої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Використаємо формулу (1):

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1,$$

алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$$

За формулою (1) маємо

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку, тобто переконаємося, що виконується рівність $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-5) & 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 \\ 5 \cdot 7 + 7 \cdot (-5) & 5 \cdot (-4) + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, обернена матриця знайдена вірно.

№2. Знайдемо обернену матрицю до заданої матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} - ?$$

Використаємо формулу (1), знаходимо:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+6-3-2=-1,$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Отже,

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку, знайдемо $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, обернена матриця знайдена вірно.

№3. Розв’яжемо матричне рівняння, використовуючи означення оберненої матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Використаємо означення оберненої матриці і перепишемо задане рівняння в рівняння вигляду:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{T} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

підставимо в рівняння:

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

№4. Розв'яжемо матричне рівняння:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Використовуючи означення оберненої матриці, перепишемо задане рівняння в рівняння вигляду:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

З прикладу №3 відомо, що обернена матриця $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,

тому підставляючи її в рівняння, отримаємо

$$X = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -17 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 & 1/4 \\ 17/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці

До елементарних перетворень матриці відносять:

1) перестановку місцями двох рядків (стовпців);

2) множення усіх елементів рядка (стовпця) матриці на число відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

<u>Означення 1</u>. Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними*** $A \sim B$*, якщо одна із них отримана з іншої за допомого елементарних перетворень.*

В матриці $A_{m\times n}$ *виберемо довільним чином* k *рядків,* k *стовпців, де* $k \leq min\,(m,n)$*.*

<u>Означення 2</u>. ***Мінором*** $\boldsymbol{k}-$***го порядку*** *матриці A називається визначник, складений з елементів матриці* A*, що знаходяться на перетині виділених рядків і стовпців.*

<u>Означення 3</u>. ***Рангом*** *матриці A називається найбільший порядок відмінного від нуля мінора матриці A і позначається* $rang(A) = r(A)$*.*

З означення 3 виплаває, що $0 \leq r(A) \leq min\,(m,n)$*.*

$r(A) = 0$*, тоді і лише тоді, коли* $A = 0$ *- нульова матриця.*

<u>Означення 4</u>. Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається ***базисним мінором****. У матриці може бути декілька базисних мінорів.*

<u>Властивості рангу матриці.</u>

Ранг матриці не зміниться, якщо:

- *матрицю транспонувати;*
- *викреслити нульовий рядок (стовпчик) матриці;*
- *при елементарних перетвореннях матриці.*

Найзручнішим методом знаходження рангу матриці є метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень, які не змінюють рангу матриці, матрицю зводять до трикутного (східчастого або трапецеподібного) вигляду. Кількість не нульових рядків вказує на ранг матриці.

Наведемо ряд прикладів.

№1. Знайдемо ранг матриці А методом елементарних перетворень.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rangA=1$.

№2. Знайдемо ранг матриці А методом елементарних перетворень.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim [III\ p = 3 \cdot II\ p + III\ p] \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, оскільки маємо два ненульові рядки, то $rang(\mathrm{A}) = 2.$

№3. Знайдемо ранг матриці А методом елементарних перетворень. Якщо від першого рядку віднімемо другий рядок, отримаємо:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отже, оскільки маємо три ненульові рядки, то $rangA=3$.

§ 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Означення 1. ***Системою лінійних алгебраїчних рівнянь*** *(СЛАР), що складається з m рівнянь і n невідомих називається система вигляду*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

де числа $a_{ij} = const,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$ *називаються коефіцієнтами системи,* $b_i = const\,,\ i = \overline{1,m},$ *– вільними членами.*

Матриця складена з коефіцієнтів системи (2):

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *– називається основною матрицею системи.*

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *– називається розширеною матрицею системи.*

Означення 2. *СЛАР називають* ***однорідною****, якщо всі вільні члени рівні нулю, тобто* $b_1=b_2=\dots=b_m=0$.

Означення 3. *СЛАР називається* ***неоднорідною****, якщо серед вільних членів є хоча б один, відмінний від нуля, член.*

Означення 4. ***Розв'язком системи лінійних рівнянь*** *називають впорядкований набір чисел* $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \dots,\ x_n = c_n$ *при підстановці яких у систему, перетворює її на тотожність.*

Означення 5. *СЛАР називається* ***сумісною****, якщо вона має хоча б один розв'язок, і* ***несумісною****, якщо вона не має жодного розв'язку.*

Означення 6. *СЛАР називається* ***визначеною****, якщо вона має єдиний розв'язок, і* ***невизначеною****, якщо має більше ніж один розв'язок (зокрема, безліч розв'язків).*

Формули Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{3}$$

де $a_{ij} = const, i = 1, 2, 3;\ \ j = 1, 2, 3;\ \ b_i = const,\ i = 1, 2, 3.$

<u>Теорема</u>. *Якщо головний визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь* $\Delta \neq 0$, *то система сумісна та має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{4}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}.$$

<u>*Зауваження 1*</u>. *Якщо для системи* (3) $\Delta=0$ *і хоча б один із визначників* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *відмінний від нуля, то система несумісна (немає розв'язків).*

<u>*Зауваження 2*</u>. *Якщо для системи* (3) $\Delta=0$ *і* $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, *то система невизначена (має безліч розв'язків).*

Наведемо ряд прикладів.

№1. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81, \end{cases}$$

використовуючи формули Крамера (4).

Обчислимо потрібні визначники та підставимо їх у відповідні формули:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 10 = 31 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 91 + 10 = 405,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 243 - 26 = 217.$$

Отже, розв'язок системи:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{496}{31} = 16, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{217}{31} = 7.$$

№2. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10, \end{cases}$$

використовуючи формули Крамера (4).

Обчислимо потрібні визначники та підставимо їх у відповідні формули:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 30 = -29 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 30 + 16 - 75 = -29, \text{ тому } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -32 + 5 - 60 = -87, \text{ тому } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 25 - 10 - 160 = -145, \text{ тому } z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Отже, $x = 1,\ y = 3,\ z = 5.$

№3. Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x - 2y - 2z = -3, \end{cases}$$

використовуючи формули Крамера (4).

Обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 8 + 6 - 4 - 6 + 8 = 0,$$

отже, задана система або несумісна, або має безліч розв’язків. Але оскільки

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 10 + 3 + 8 - 10 = 21 \neq 0,$$

то із зауваження 1 слідує, що задана система рівнянь не має розв’язків.

№4. Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = \dfrac{1}{3}, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \end{cases}$$

використовуючи формули Крамера (4).

Обчислюємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 9 \end{vmatrix} = -36 + 5 + 72 - 30 - 27 + 16 = 0,$$

отже, задана система або несумісна, або має безліч розв’язків.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ \frac{1}{3} & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 18+3+8-18-3-8=0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6-5-27+5+27-6=0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & \frac{1}{3} \\ 5 & -8 & 3 \end{vmatrix} = -12+\frac{5}{3}+24-10-9+\frac{16}{3}=0.$$

Оскільки, $\Delta = \Delta_1 = \Delta_1 = \Delta_3 = 0$, то задана система рівнянь має нескінченну кількість розв’язків.

Матричний метод

Запишемо систему (3) *в матричному вигляді:*

$$AX = B,$$

де

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *– основна матриця системи,*

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *– матриця невідомих системи,*

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ *– матриця з вільних членів системи.*

Розв’язавши матричне рівняння $AX = B$, *отримаємо розв’язок:*

$$X = A^{-1}B,$$

де

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

числа A_{ij} $(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ – *алгебраїчні доповнення елементів* a_{ij} *основної матриці системи*.

Наведемо ряд прикладів.

№1. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + z = -2 \\ x + 2y = 3 \\ -x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

матричним методом.

Запишемо систему в матричному вигляді $AX = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю до матриці А, використовуючи формулу (1):

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 1 + 15 \neq 0,$$

отже, обернена матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = 4, \; A_{12} = -2, \; A_{13} = 3,$$

$$A_{21} = 1, A_{22} = 7, \; A_{23} = -3,$$

$$A_{31} = -2, A_{32} = 1, \; A_{33} = 6.$$

З (1) випливає:

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Підставимо в рівність $X = A^{-1}B$:

$$\mathrm{X} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -8+3-10 \\ 4+21+5 \\ -6-9+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = -1, \quad y = 2, \quad z = 1.$

Метод Гауса

Розглянемо систему m лінійних рівнянь із n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5}$$

СЛАР (5) *шляхом елементарних перетворень зведемо до трикутного або трапецеподібного вигляду. Під трикутним та трапецеподібним виглядом розуміють:*

● *трикутний вигляд:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1(n-1)}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2(n-1)}x_{n-1} + c_{2n}x_n = \widetilde{b_2}, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad c_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + c_{(n-1)n}x_n = \widetilde{b_{n-1}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = \widetilde{b_n}; \end{cases} \tag{6}$$

● *трапецеподібний вигляд:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad +c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = \widetilde{b_2}, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = \widetilde{b_r}, \\ \qquad\qquad 0 = \widetilde{b_{r+1}}, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad 0 = \widetilde{b_m}. \end{cases} \tag{7}$$

СЛАР (6) *розв'язують знизу вгору.*

Розглянемо детальніше знаходження розв'язків $x_1, x_2, \dots, x_n$ *СЛАР* (7). *Нехай система* (7) *має r рівнянь та n невідомих.*

1) *Якщо хоча б одне із значень* $\widetilde{b_{r+1}}, \dots, \widetilde{b_m}$ *відмінне від нуля, то система несумісна (не має розв'язків).*
2) *Якщо* $\widetilde{b_{r+1}} = \cdots = \widetilde{b_m} = 0$, *то система має безліч розв'язків, отже, система сумісна, але невизначена. Тоді, перших n невідомих називають <u>основними (базисними)</u>, а решту (n − r) невідомих – <u>вільними</u> (приймають довільні сталі значення). Базисні невідомі виражають через вільні невідомі.*

Розв'язуючи СЛАР (5) *методом Гауса, до трикутного (трапецеподібного) вигляду для зручності приводять не систему рівнянь, а розширену матрицю системи.*

<u>Означення 1</u>. ***Розширеною матрицею системи*** *називають матрицю, утворену приєднанням до основної матриці стовпчика вільних членів.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

де A – основна матриця системи (5), $\overline{A}$ *– розширена матриця системи* (5).

Метод Гауса менш громіздкий у обчисленнях на відміну від матричного методу і формул Крамера та його можна застосовувати і тоді, коли головний визначник системи дорівнює нулю.

Наведемо ряд прикладів.

№1. Розв'яжемо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

методом Гаусса. Випишемо розширену матрицю заданої системи та приведемо її до трапецеподібного вигляду:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} II_р = I_р + II_р \\ III_р = I_р \cdot 2 - III_р \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim [\, III_р = II_р + III_р \,] \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Отже, система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad y - z = 4 \\ \quad\quad 0 = 4 \end{cases}$$

Задана система лінійних рівнянь несумісна, тобто не має розв'язків, оскільки третя рівність не виконується.

№2. Розв'яжемо систему чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

методом Гаусса. Випишемо розширену матрицю заданої системи та приведемо її до трапецеподібного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim [\,\mathrm{I}_{\text{ст}} \leftrightarrow \mathrm{II}_{\text{ст}}\,] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \mathrm{II}_{\text{р}} = \mathrm{I}_{\text{р}} - \mathrm{II}_{\text{р}} \\ \mathrm{III}_{\text{р}} = \mathrm{I}_{\text{р}} - \mathrm{III}_{\text{р}} \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim [\ \mathrm{IV}_p = \mathrm{II}_{\text{р}} + \mathrm{IV}_{\text{р}}\ ] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim [\ \mathrm{III}_p = \mathrm{III}_{\text{р}} + \mathrm{IV}_{\text{р}}\ ] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Таким чином, система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} y + x + z = 1, \\ \quad - y - z = 0, \\ \qquad\quad 2z = 1, \end{cases}$$

розв’язуючи її знизу вгору, поступово знайдемо всі розв’язки:

$$\begin{cases} y = 1, \\ x = -\dfrac{1}{2}, \\ z = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

№3. Розв’яжемо систему трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса. Випишемо розширену матрицю заданої системи та приведемо її до трапецеподібного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vline & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & \vline & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & \vline & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} \text{II}_\text{р} = \text{I}_\text{р} + \text{II}_\text{р} \cdot (-1) \\ \text{III}_\text{р} = \text{I}_\text{р} + \text{III}_\text{р} \cdot (-1) \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vline & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vline & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \vline & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim [\text{III}_p = \text{III}_\text{р} + \text{II}_\text{р}] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vline & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vline & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vline & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vline & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_4 = 2, \end{cases}$$

розв'яжемо її знизу вгору:

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Система рівнянь сумісна і має нескінченну кількість розв'язків. Позначивши вільні невідомі x_1 та x_2 через деякі довільні сталі C_1 і C_2 відповідно, знайдемо невідому x_3. Загальний розв'язок матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ x_3 = 2C_2 - C_1, \\ x_4 = 1, \text{ де } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Теорема Кронекера – Капеллі

Під час розв'язання систем, помічаємо, що питання сумісності є одним із основних питань, на яке нам дає відповідь теорема Кронекера – Капеллі.

***<u>Теорема Кронекера – Капеллі</u>**. СЛАР сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, тобто $rangA = rang\,\overline{A}$.*

1) *Якщо $rangA = rang\,\overline{A} = n$, де n – число невідомих, то система має єдиний розв'язок.*
2) *Якщо $rangA = rang\,\overline{A} < n$, то система має безліч розв'язків.*

Наведемо ряд прикладів.

№1. Дослідимо на сумісність і знайдемо розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x-\sqrt{3}y=1 \\ \sqrt{3}x-3y=\sqrt{3} \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи. За допомогою елементарних перетворень матриці знайдемо ранги основної і розширеної матриць.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \end{array}\right) \sim [\, II_{р} = II_{р} + I_{р} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)] \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Тоді $rangA=1$, $rang\overline{A}=1, n=2$. Оскільки $rangA=rang\overline{A}<n,$ то за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків. Після перетворень матриці, отримаємо, що задана система набула вигляду

$$x-\sqrt{3}y=1,$$

покладемо $y=C=const.$ Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} y=C \\ x=1+C\sqrt{3} \end{cases}$$

№2. Дослідимо на сумісність і знайдемо розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1 \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи. За допомогою елементарних перетворень матриці знайдемо ранги основної і розширеної матриць.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} II_{р} = I_{р} + II_{р} \cdot (-2) \\ III_{р} = I_{р} + III_{р} \cdot (-2) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \end{array}\right) \sim [\, III_{р} = III_{р} + II_{р}\,] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Отже, $r\left(A\right)=2,\ r\left(\overline{A}\right)=3,\quad rangA < rang\overline{A} \quad \Rightarrow$ за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна і не має розв’язків.

№3. Дослідимо на сумісність і знайдемо розв’язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$$

Запишемо матрицю системи, використовуючи властивості матриць та зробимо перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{array}\right) \sim [\,\mathrm{I}_р \leftrightarrow \mathrm{III}_р\,] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \mathrm{II}_р = \mathrm{I}_р \cdot (-2) + \mathrm{II}_р \\ \mathrm{III}_р = \mathrm{I}_р \cdot (-3) + \mathrm{III}_р \\ \mathrm{IV}_р = \mathrm{I}_р \cdot (-1) - \mathrm{IV}_р \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & 1 & 13 & 3 \\ 0 & -8 & -5 & 13 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & 13 & 25 \end{array}\right) \sim [\,\mathrm{II}_{ст} \leftrightarrow \mathrm{IV}_{ст}\,] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & -8 & 12 \\ 0 & 13 & -4 & -3 & 25 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \mathrm{III}_р = \mathrm{II}_р \cdot (-1) + \mathrm{III}_р \\ \mathrm{IV}_р = \mathrm{III}_р \cdot (-1) + \mathrm{IV}_р \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 13 \end{array}\right) \sim [\,\mathrm{IV}_р = \mathrm{III}_р + \mathrm{IV}_р \cdot 6\,] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 13 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 29 & 87 \end{array}\right)$$

Тоді $rangA = 4, rang\overline{A} = 4, n = 4.$ Отже, $rangA = rang\overline{A}=n = 4,$ за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має єдиний розв'язок. Після перетворень матриці, отримаємо, що задана система набула вигляду (зауважимо, що при перетвореннях поміняли місцями другий та четвертий стовпчик, тому другому стовпчику матриці відповідає невідома x_4, а четвертому – невідома x_2):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ -7x_2 + x_3 + 13x_4 = 3 \\ -x_2 - 6x_3 = 9 \\ 29x_2 = 87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - 2x_2 + 4x_4 \\ 13x_4 = 3 - x_3 + 7x_2 \\ 6x_3 = -x_2 - 9 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2$.

№4. Дослідимо на сумісність і знайдемо розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126 \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210 \end{cases}$$

Запишемо матрицю системи, використовуючи властивості матриць та зробимо перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 35 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 70 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 126 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 210 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{II}_p = \text{II}_p + \text{I}_p \cdot (-1) \\ \text{III}_p = \text{III}_p + \text{I}_p \cdot (-1) \\ \text{IV}_p = \text{IV}_p + \text{I}_p \cdot (-1) \\ \text{V}_p = \text{V}_p + \text{I}_p \cdot (-1) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 & 55 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 & 111 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 & 195 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \text{III}_p = \text{III}_p + \text{II}_p \cdot (-2) \\ \text{IV}_p = \text{IV}_p + \text{II}_p \cdot (-3) \\ \text{V}_p = \text{V}_p + \text{II}_p \cdot (-4) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 & 51 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 & 115 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{IV}_p = \text{IV}_p + \text{III}_p \cdot (-3) \\ \text{V}_p = \text{V}_p + \text{III}_p \cdot (-6) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 & 25 \end{array}\right) \sim [\ \mathrm{V_p} = \mathrm{V_p} + \ \mathrm{IV_p} \cdot \ (-4)] \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$rangA = 5,\ rang\overline{A} = 5,\ n = 5$. За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і має єдиний розв’язок.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 20 \\ x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 15 \\ x_4 + 4x_5 = 6 \\ x_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 15 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = 20 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 \\ x_3 = 15 - 3x_4 - 6x_5 \\ x_4 = 6 - 4x_5 \\ x_5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 5,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2,\ x_5 = 1$.

Задачі для типового розрахунку

№1. Дано матриці A і B. Знайти $3A - B \cdot A + A^{-1}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

23. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

25. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

27. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

28. $A=\begin{pmatrix} -7 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

29. $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$

30. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

31. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

32. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

33. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

34. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

35. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

36. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

37. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

38. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

39. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

40. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№2. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і описати її розв’язки:

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3-5x_4=9, \\ 5x_1-7x_2+8x_3+2x_4=18, \\ 4x_1+5x_2-7x_3-3x_4=-5, \\ 7x_1+8x_2+3x_3+4x_4=-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_2-x_1+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-6x_4=-10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4=5, \\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+5x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1-7x_2-x_3+2x_4=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=0, \\ 3x_1+5x_2-7x_3=0, \\ 4x_1-5x_2-6x_3=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7, \\ x_1+8x_2-7x_3=12. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1+3x_2-x_3=-2, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+2x_3=7, \\ x_1+3x_2=7, \\ 2x_1-2x_2+x_3=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-2, \\ 2x_1+x_2+3x_3=10, \\ 3x_1-4x_2+6x_3=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=8, \\ 3x_1+x_2-2x_3=7, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=-12. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1+x_2-x_3=-1, \\ -x_1+2x_2+2x_3=-3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8, \\ 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 12. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

31. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

32. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

33. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

35. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19, \\ 7x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

37. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -3x_1 + 9x_2 + x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$$

38. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ 2x_1 - 13x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 49, \\ 4x_1 + 9x_2 - 13x_3 + 14x_4 = -37. \end{cases}$$

39. $$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

40. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: Учеб. пособие для втузов.— 5-е изд., испр.— М.: Высш. шк., 1999.— 304 с.: ил.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.*Вища математика: Навч. посібн.— К.: А.С.К., 2006.— 648 с.: ил.
3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра: Учеб. для вузов.— 4-е изд.— М.: Наука, Физматлит, 1999.— 296 с.
4. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике.Часть V.— 2-е изд.— Харьков, Издательство Харьковского университета, 1972.— 412 с.
5. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. 1 часть.— М.: Рольф, 2002.— 288 с.: ил.
6. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа. / под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*.— М.: Наука, Физматлит, 1981.— 464 с.

ЗМІСТ